

COURS D'ÉNERGÉTIQUE AVANCÉ

Notions fondamentales

STÉPHANE CHEVALIER

Arts et Métiers Bordeaux,
Esplanade des Arts et Métiers, 33405 Talence.

`stephane.chevalier@u-bordeaux.fr`

2 janvier 2022

Ce document de synthèse vient en complément des supports de cours donnés sous forme de diaporama. Il a pour but d'approfondir et de clarifier certaines notions qui ne seraient pas vues durant le cours. Ce dernier se focalisant plutôt sur des exemples d'application et les méthodologies de résolution de problèmes d'énergétique. Ainsi, il est conseillé de lire et de suivre l'ensemble du diaporama dans un premier temps, puis de compléter la lecture du cours avec le présent document lors des EDs.

La reproduction, adaptation et réutilisation de ce cours est autorisée pour tout usage, y compris commercial, sous les conditions de la licence [CC-BY-SA 4.0](#). Vous êtes donc libre de l'utiliser tel quel en cours, ou bien d'en remixer le contenu selon vos besoins. Vous devez créditer l'auteur.

Table des matières

1	Équations fondamentales	5
1.1	Conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique)	5
1.1.1	Définition d'un système quelconque ouvert	5
1.1.2	Conservation de l'énergie appliquée aux circuits	6
1.1.3	Conservation de l'énergie appliquée aux machines	7
1.2	Conservation de la masse	8
1.3	Conservation de la quantité de mouvement	9
2	Cinématique des vitesses sur un ensemble d'aubage	10
2.1	Composition des vitesses	10
2.2	Triangle des vitesses	11
3	Modèle d'état : le modèle Gaz Parfait	13
3.1	Définition des variables d'état	13
3.2	Définition de la transformation isentropique	14
3.3	Définition du travail d'un fluide compressible	15
4	Écoulement compressible	15
4.1	Définition du nombre de Mach	15
4.2	Définition des variables d'arrêt isentropique	16
5	Diagramme énergétique des machines	17
5.1	Transfert d'énergie dans le stator	17
5.2	Transfert d'énergie dans le rotor	18
5.3	Rendement isentropique	19

Nomenclature

Le tableau ci-après résume les principales notations qui seront utilisées dans le cours et les énoncés de TD.

Variable	Unités	Définition
<i>Roman</i>		
c	m/s	Vitesse du son
c_v, c_p	J/(kg.K)	Capacités calorifiques
D	m	Diamètre
e	J/kg	Énergie spécifique
\vec{e}_i	-	Système de coordonnées
g	m/s ²	Accélération de la pesanteur
h	J/kg	Enthalpie spécifique
M	mol/kg	Masse molaire
m	kg	Masse
n	mol	Quantité de matière
N	tr/min	Vitesse de rotation
\vec{n}	-	Vecteur normal
p	Pa ou bar	Pression
Q	J/kg	Chaleur spécifique
q	kg/s ou m ³ /s	Débit massique ou volumique
R	J/(mol.K)	Constante des gaz parfait (8,314)
r	J/(kg.K)	Constante des gaz parfait spécifique
r_i	m	Rayon i
S	m ²	Section de passage
s	J/(kg.K)	Entropie spécifique
T	K	Température
t	s	Temps
u	J/kg	Énergie interne spécifique
v	m ³ /kg	Volume spécifique
V	m ³	Volume
z	m	Hauteur
<i>Script</i>		
\mathcal{P}	W	Puissance
\mathcal{T}	J/kg (ou m ² /s ²)	Travail spécifique
\mathcal{R}	-	Espace vectoriel
$\vec{\mathcal{V}}$	m/s	Vecteur vitesse absolue du fluide
\mathcal{V}	m/s	Vitesse absolue du fluide ($\mathcal{V} = \ \vec{\mathcal{V}}\ $)
$\vec{\mathcal{U}}$	m/s	Vecteur vitesse du rotor

Variable	Unités	Définition
\mathcal{U}	m/s	Vitesse du rotor ($\mathcal{U} = \ \vec{\mathcal{U}}\ $)
$\vec{\mathcal{W}}$	m/s	Vecteur vitesse relatif du fluide
\mathcal{W}	m/s	Vitesse relative du fluide ($\mathcal{W} = \ \vec{\mathcal{W}}\ $)
<i>Grec</i>		
α	rad	Angle de l'écoulement dans le repère absolu
β	rad	Angle de l'écoulement dans le repère relatif
Δ	-	Opérateur différence
η	-	Rendement
μ	Pa.s	Viscosité dynamique du fluide
ρ	kg/m ³	Masse volumique
ω	rad/s	Vitesse angulaire

1 Équations fondamentales

L'ensemble des calculs effectués dans le cours d'énergétique est basé sur trois lois de conservation : l'énergie, la masse et la quantité de mouvement. Elles sont développées dans cette note de cours.

1.1 Conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique)

1.1.1 Définition d'un système quelconque ouvert

Le bilan d'énergie se base sur la définition d'un système énergétique dans lequel un fluide traverse une machine. Il rentre à une hauteur, une vitesse, une énergie interne, et une masse volumique donnée. Il traverse une certaine section d'entrée. Les mêmes hypothèses sont faites en sortie. A l'intérieur de ce système, il y a un échange de chaleur avec l'extérieur Q_e , un travail mécanique apporté par un arbre de machine \mathcal{T}_a dont une partie \mathcal{T}_m est transféré au fluide, et les travaux internes liés aux forces de pression \mathcal{T}_i .

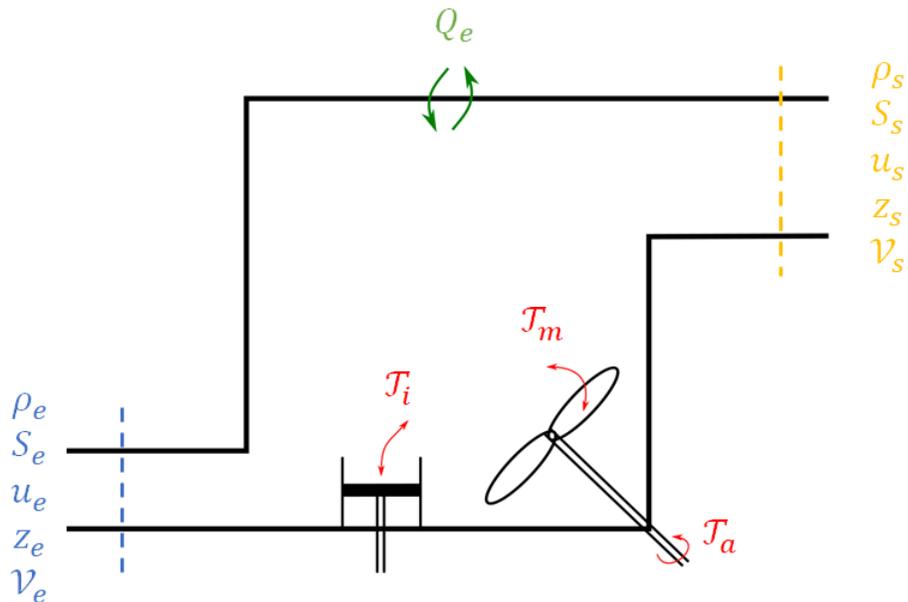


FIGURE 1 – Système énergétique quelconque dans lequel un fluide échange avec une machine. Le système est considéré isolé.

Le premier principe de la thermodynamique appliqué au système décrit dans la Figure 1 s'écrit en effectuant le bilan d'énergie entrée - sortie du système :

$$\Delta_{es}u + \Delta_{es}e_c + \Delta_{es}e_z = \mathcal{T} + Q_e, \quad (1.1)$$

avec $e_c = \mathcal{V}^2/2$ l'énergie cinétique et $e_z = gz$ l'énergie potentielle. Le travail $\mathcal{T} = \mathcal{T}_a + \mathcal{T}_i$ se décompose en un travail sur l'arbre de la machine \mathcal{T}_a , et des travaux internes $\mathcal{T}_i = -\Delta(pv)$ dus aux forces de pression et de volume. En utilisant la définition de l'enthalpie $\Delta h = \Delta(u + pv)$, nous avons :

$$\Delta_{es}h + \Delta_{es}e_c + \Delta_{es}e_z = \mathcal{T}_a + Q_e, \quad (1.2)$$

ou encore :

$$\Delta_{es}h_0 + \Delta_{es}e_z = \mathcal{T}_a + Q_e, \quad (1.3)$$

en utilisant la définition de l'enthalpie totale (ou d'arrêt) $h_0 = h + \frac{\mathcal{V}^2}{2}$ (voir section 4 pour le détail).

Dans la plupart des cycles thermodynamiques que nous étudierons, nous négligerons l'énergie potentielle, ce qui nous ramènera au bilan enthalpique suivant :

$$\boxed{\Delta_{es}h_0 = \mathcal{T}_a + Q_e.} \quad (1.4)$$

1.1.2 Conservation de l'énergie appliquée aux circuits

L'utilisation du premier principe pour l'étude des transferts d'énergie subit par le fluide au sein d'un circuit requiert de le réécrire sous la forme de *Bernouilli Généralisé*.

Dans un circuit quelconque comprenant une machine (génératrice ou réceptrice) le fluide reçoit ou perd un travail réversible \mathcal{T}_m ¹ à la traverser de la machine. Le premier principe s'écrit donc

$$\Delta_{es}u + \Delta_{es}e_c + \Delta_{es}e_z = \mathcal{T}_m + \mathcal{T}_i + Q_e. \quad (1.5)$$

En reliant les travaux internes, $\mathcal{T}_i = \int d(pv)$, aux forces de pression et de volume, nous obtenons :

$$\Delta_{es}u + \int_e^s pdv - Q_e + \int_e^s vdp + \Delta_{es}e_c + \Delta_{es}e_z = \mathcal{T}_m. \quad (1.6)$$

Il est possible de démontrer² via l'égalité de Jouguet limitée aux irréversibilités internes [1], que $\Delta u + \int pdv = \int Tds = Q_e + \mathcal{T}_f$, où \mathcal{T}_f sont les frottements fluides dans le circuit, exprimés généralement sous forme de *pertes de charge*. Cette égalité de Jouguet est limitée aux irréversibilités internes (Q_e est

1. \mathcal{T}_m sera aussi égale au travail isentropique de la machine, i.e. le travail sur l'arbre diminué des frottements.

2. l'entropie se définit de la manière suivante : $\int ds = \int c_v dT/T - \int \beta_v pd\rho/\rho^2 = \int c_v dT/T + \int \beta_v pdv$, car $dv = d(1/\rho) = -d\rho/\rho^2$. En faisant l'hypothèse que dans les fluides étudiés le coefficient d'accroissement de pression isochore est $\beta_v = T(dp/dT)_v = 1/T$, alors $\int Tds = \int c_v dT + \int pdv$ où $\Delta u = \int du = \int c_v dT$.

considéré ici comme un échauffement interne du fluide) et constitue la forme pratique d'application du Second Principe aux turbomachines. D'où l'expression de Bernouilli Généralisé :

$$\int_e^s v dp + \Delta_{es} e_c + \Delta_{es} e_z = \mathcal{T}_m - \mathcal{T}_f \quad (1.7)$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, nous retiendrons la forme intégrée de Bernouilli :

$$\boxed{\frac{\Delta_{es} p}{\rho} + \Delta_{es} e_c + \Delta_{es} e_z = \mathcal{T}_m - \mathcal{T}_f} \quad (1.8)$$

1.1.3 Conservation de l'énergie appliquée aux machines

Nous repartons du bilan enthalpique défini précédemment (équation 1.4), et nous allons redéfinir le travail sur l'arbre, \mathcal{T}_a . Celui-ci est lié à la cinématique des vitesses sur les aubages, avec $\mathcal{T}_a = \Delta(\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}})$ (la démonstration sera faite un peu plus loin en utilisant la conservation de la quantité de mouvement, voir section 1.3). \mathcal{T}_a est également lié au travail réversible (ou isentropique) que reçoit le fluide, \mathcal{T}_m , par :

$$\mathcal{T}_a = \mathcal{T}_m + \mathcal{T}_{fa} \quad (1.9)$$

où \mathcal{T}_{fa} sont les frottements fluides au sein de la machine (aubages, ...). Dans le cas d'une machine génératrice, l'arbre fournit plus d'énergie que reçoit le fluide car il faut compenser les frottements. C'est l'inverse dans le cas d'une machine réceptrice (\mathcal{T}_a et $\mathcal{T}_m < 0$ dans ce cas).

Les machines étudiées dans ce cours seront considérées adiabatiques, i.e. $Q_e \approx 0$, ce qui conduit au bilan enthalpique suivant :

$$\Delta h_0 = \Delta(\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}}) = \mathcal{T}_m + \mathcal{T}_{fa}, \quad (1.10)$$

qui revient à dire que la variation d'enthalpie totale du fluide traversant la machine dépend de la cinétique des vitesses sur les aubages, qui est convertie en travail réversible, \mathcal{T}_m , et en frottements au sein de la machine, \mathcal{T}_{fa} .

Enfin, en reliant le travail réversible reçu par le fluide décrit par l'expression de Bernouilli généralisée (équation 1.8 en négligeant l'énergie potentielle), nous obtenons la relation suivante :

$$\boxed{\mathcal{T}_a = \Delta h_0 = \Delta(\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{\mathcal{V}}) = \mathcal{T}_m + \mathcal{T}_{fa} = \int v dp + \Delta e_c + \mathcal{T}_{fa}.} \quad (1.11)$$

Les frottements du circuit \mathcal{T}_f , ne sont pas pris en compte ici car nous nous intéressons à la machine uniquement. Ainsi au sein d'une machine, le travail sur l'arbre est converti sous forme de travail des forces de pression, d'énergie

cinétique et de frottements. Les travaux des forces de pression et l'énergie cinétique forme le travail réversible, \mathcal{T}_m , qui sera utilisé par le fluide afin de vaincre les pertes de charge et la pression statique du circuit lors de sa circulation.

Notons enfin que le rendement hydraulique de la machine se calcule comme :

$$\eta_h = \frac{\mathcal{T}_m}{\mathcal{T}_a} = \frac{\mathcal{T}_a - \mathcal{T}_{fa}}{\mathcal{T}_a} \quad (1.12)$$

Dans certain cas, nous pourrions supposer que le rendement hydraulique est en réalité égal au rendement isentropique de la machine (si les pertes mécaniques et de débit de fuite sont négligeables). Cette notion sera détaillée dans le section 5.3.

1.2 Conservation de la masse

Un fluide traversant une surface, S quelconque est schématisé sur la Figure 2 à gauche. On considérera que la vitesse du fluide est une vitesse moyenne, identique en tout point de la surface. La vitesse du fluide est représentée par le vecteur vitesse $\vec{V}_1 = \mathcal{V}_{1e}\vec{e}_e + \mathcal{V}_{1t}\vec{e}_t$ où \vec{e}_e est la direction de l'écoulement et \vec{e}_t est la direction tangentielle. Le débit massique (kg/s) du fluide traversant la surface se calcule de la façon suivante :

$$q_m = \rho S \vec{V}_1 \cdot \vec{n} = \rho S \vec{V}_1 \cdot \vec{e}_e = \rho S \mathcal{V}_{1e} \quad (1.13)$$

où \vec{n} est le vecteur normal à la surface au point considéré. Dans le calcul du débit, c'est uniquement la composante normale (\mathcal{V}_{1e}) du vecteur vitesse qui est prise en compte.

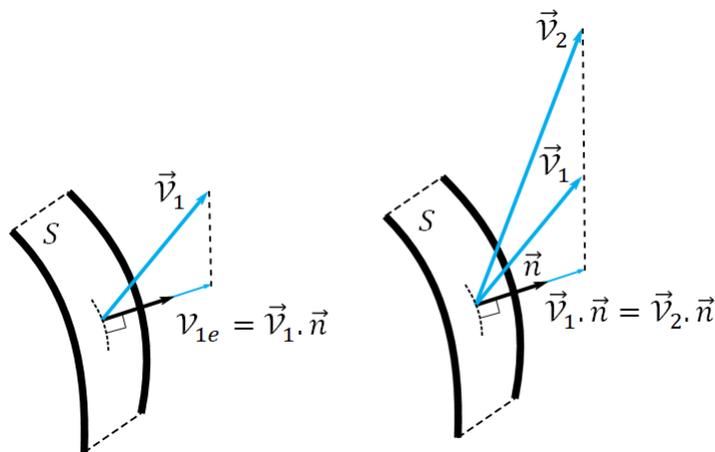


FIGURE 2 – Schéma d'un fluide traversant une surface S . A gauche lorsque le fluide sort à la vitesse \vec{V}_1 , et à droite une comparaison lorsqu'il sort à la vitesse \vec{V}_2 mais avec le même débit massique.

Nous noterons la différence entre énergie cinétique et conservation de la masse. Le calcul de l'énergie cinétique est donnée par la norme de la vitesse, i.e. $\|\vec{V}_1\|^2/2$, qui sera noté par simplification $\mathcal{V}_1^2/2$. Et le débit massique par la composante selon \vec{e}_e de la vitesse.

Ainsi, sur la Figure 2 à droite, nous remarquons que le fluide à la vitesse \vec{V}_2 a une énergie cinétique beaucoup plus grande que s'il avait une vitesse \vec{V}_1 alors que dans les deux cas, il possède le même débit massique traversant la surface S : $q_m = \rho S \vec{V}_1 \cdot \vec{n} = \rho S \vec{V}_2 \cdot \vec{n} = cte$.

C'est ce concept de variation de l'énergie cinétique du fluide qui conserve le débit massique qui est utilisé au sein des machines pour comprimer ou détendre le fluide sur les aubages.

1.3 Conservation de la quantité de mouvement

Soit un tube de courant en rotation autour d'un axe OO' . Le fluide rentre à la vitesse \vec{V}_1 et est dévié au sein de ce tube à la vitesse \vec{V}_2 . Cette configuration est schématisée sur la Figure 3.

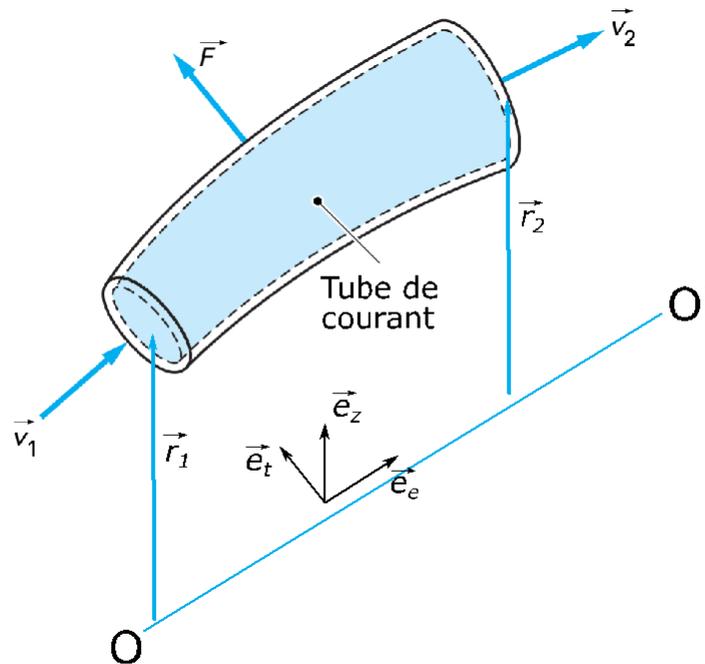


FIGURE 3 – Forces extérieures s'exerçant sur un tube de courant. Figure adaptée de la référence [2].

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au vecteur impulsion $\vec{p} = m\vec{V}$ s'écrit dans le cas d'un écoulement stationnaire au sein du tube de

courant schématisé sur la Figure 3 :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{ext} \vec{F} \equiv q_m(\vec{\mathcal{V}}_2 - \vec{\mathcal{V}}_1). \quad (1.14)$$

Ici, la somme des forces extérieures correspond à l'effort du fluide sur les parois du tube, qui pourra se résumer à un seul effort transversal \vec{F} . Le couple généré par cet effort transversal sur l'axe OO' se calcule alors :

$$\vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{F} = q_m(\vec{r}_2 \wedge \vec{\mathcal{V}}_2 - \vec{r}_1 \wedge \vec{\mathcal{V}}_1) = q_m(r_2 \mathcal{V}_{2t} - r_1 \mathcal{V}_{1t}) \vec{e}_e \quad (1.15)$$

avec \mathcal{V}_t la composante tangentielle de la vitesse, i.e. $\mathcal{V}_t = \vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{e}_t$. La puissance disponible sur l'axe OO' se déduit alors :

$$\mathcal{P} = \vec{C} \cdot \vec{e}_e \omega = q_m \omega (r_2 \mathcal{V}_{2t} - r_1 \mathcal{V}_{1t}) = q_m (\mathcal{U}_2 \mathcal{V}_{2t} - \mathcal{U}_1 \mathcal{V}_{1t}), \quad (1.16)$$

d'où nous déduisons le travail spécifique ($\mathcal{P} = q_m \mathcal{T}_a$) :

$$\boxed{\mathcal{T}_a = \mathcal{U}_2 \mathcal{V}_{2t} - \mathcal{U}_1 \mathcal{V}_{1t} = \Delta_{12}(\mathcal{U} \mathcal{V}_t)}. \quad (1.17)$$

Cette relation est appelée *Théorème d'Euler*.

En conclusion, ce théorème montre, qu'il est nécessaire de dévier l'écoulement pour créer une force \vec{F} sur les aubes d'une turbomachine. Le mouvement des aubes permet alors un transfert d'énergie entre le fluide et l'arbre de la machine.

2 Cinématique des vitesses sur un ensemble d'aubage

2.1 Composition des vitesses

Au sein d'une machine, le fluide traverse deux types d'aubages :

- les aubes du stator, qui sont par définition statiques. Elle permettent de détendre ou de comprimer le fluide par simple déviation de celui-ci ;
- les aubes du rotor qui sont mobiles et en rotation. Le mouvement des aubages produit par définition un transfert d'énergie sous forme de travail du côté de l'arbre et sous forme d'énergie cinétique et/ou de pression du côté du fluide.

La trajectoire du fluide au sein du stator est relativement simple puisque seul le fluide est en mouvement. Dans le rotor en revanche, il faut tenir compte du mouvement des aubages par rapport au fluide et au référentiel terrestre (ou absolu). La Figure 4 illustre ce principe avec la trajectoire d'une particule

fluide au sein d'une pompe centrifuge. Celle-ci est représentée dans les deux référentiels : celui des aubages en mouvement où le fluide suit une trajectoire entre deux aubes, et celui du référentiel absolu qui donne la trajectoire de la particule du point de vue de l'utilisateur.

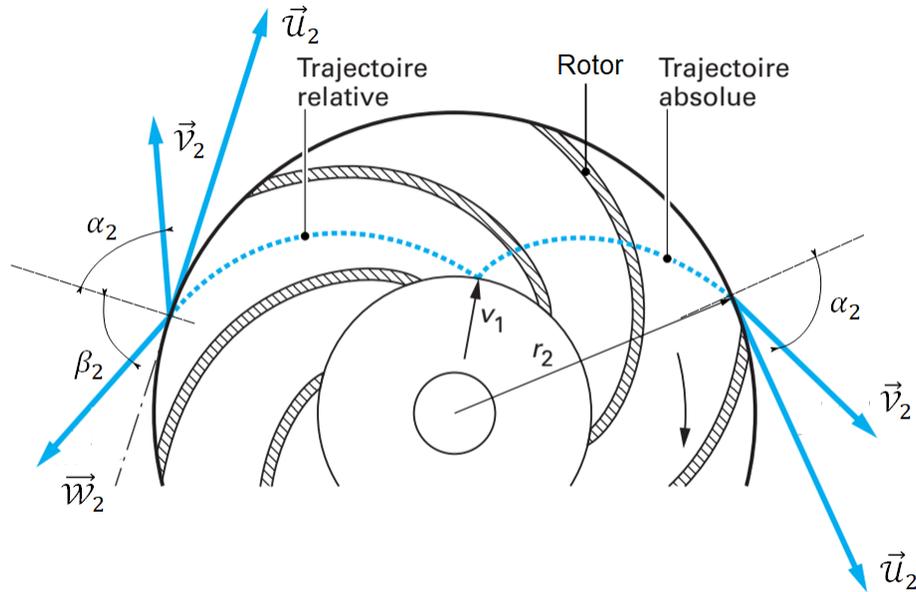


FIGURE 4 – Trajectoire d'une particule dans une pompe centrifuge. Figure adaptée de [2].

Ce phénomène de mouvement relatif donne lieu à une composition des vitesses tel que :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}}, \quad (2.1)$$

où l'on retrouve la vitesse absolue du fluide, \vec{v} , la vitesse relative du fluide par rapport aux aubages, \vec{w} , et la vitesse tangentielle de l'aubage, \vec{u} . Cette dernière vitesse est liée à la vitesse de rotation de l'arbre par $\vec{u} = r_i \omega \vec{e}_t$.

2.2 Triangle des vitesses

Cette composition des vitesses, équation 2.1 peut se représenter sous la forme d'un triangle qui sera appelé *Triangle des vitesses*. Il est présenté dans la Figure 5 dans lequel deux angles sont présentés :

- α l'angle de l'écoulement dans le repère absolu qui définit la trajectoire du fluide dans ce même repère ;
- β l'angle de l'écoulement dans le repère relatif. Ce dernier est en lien direct avec la géométrie de l'aubage, i.e. il définit les angles d'attaque

et de fuite des aubes.

Ainsi, au travers des angles de ce triangle des vitesses, c'est la géométrie des aubes qui est traduite. Nous pouvons remarquer sur la Figure 4 que l'angle β_2 de \vec{W}_2 correspond à l'angle de fuite de l'aube. Ce qui s'explique par le fait que le fluide est tangent à l'aubage dans le repère relatif.

Le triangle des vitesses apporte donc un lien entre la cinématique des vitesses et la géométrie des aubes de la machine.

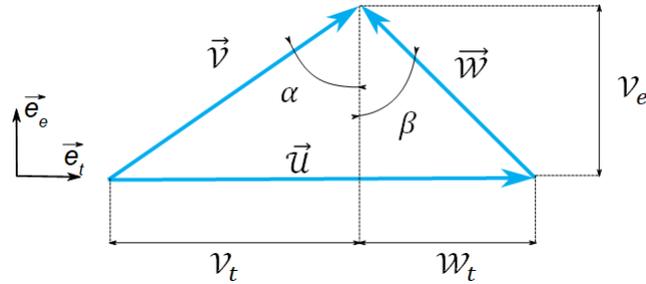


FIGURE 5 – Représentation graphique des composantes de vitesses d'écoulement. Les indices t et e indique les directions tangentielle et d'écoulement.

Le triangle des vitesses et la cinématique des vitesses permettent alors de lier la géométrie de l'aubage à son écoulement. En utilisant le théorème d'Euler et Bernoulli Généralisé appliqué aux machines (equation 1.11), il est alors possible de lier le travail sur le rotor (ou l'arbre) à la cinématique des vitesses, et au transfert d'énergie dans le fluide :

$$\mathcal{T}_a = \Delta(\mathcal{U}\mathcal{V}_t) = \int dp/\rho + \Delta e_c + \mathcal{T}_{fa}. \quad (2.2)$$

Cette relation illustre que le transfert de travail, \mathcal{T}_a , est issu d'une déviation du fluide, $\Delta(\mathcal{U}\mathcal{V}_t)$, qui résulte en une variation de pression, d'énergie cinétique et de frottements, $\int dp/\rho + \Delta e_c + \mathcal{T}_{fa}$, au sein du fluide.

Dans une machine génératrice, le travail mécanique sur l'arbre d'une machine est converti en énergie de pression (piezométrique), en énergie cinétique et en frottements. On retrouve le travail réversible, $\mathcal{T}_m = \int dp/\rho + \Delta e_c$, que reçoit le fluide.

C'est l'inverse dans le cas d'une machine réceptrice, la quantité $\int dp/\rho + \Delta e_c$ étant négative, le travail sur l'arbre \mathcal{T}_a est inférieur au travail réversible \mathcal{T}_m contenu dans le fluide du fait des frottements, i.e. $\mathcal{T}_a = \mathcal{T}_m - \mathcal{T}_{fa}$.

3 Modèle d'état : le modèle Gaz Parfait

3.1 Définition des variables d'état

Le besoin d'un modèle d'état arrive dès lors que l'on souhaite relier les variables thermodynamiques (pression, température, masse volumique...) au fonction d'état d'un système (enthalpie, énergie interne, entropie...). Plusieurs modèles existent dans la littérature [3], mais nous nous limiteront dans ce cours au plus simple d'entre tous : le modèle Gaz Parfait.

Le modèle Gaz Parfait décrit de façon linéaire le lien entre enthalpie et température, et énergie interne en supposant que les interactions entre les molécules composant le gaz sont négligeables. Dans ce cadre, il permet également d'exprimer simplement l'entropie d'un système en fonction de sa pression et de sa température. Il est basé sur les hypothèses suivantes :

- valide principalement pour les gaz diatomique. Il peut décrire quelques autres gaz simples sous certaines conditions (exemple : la vapeur d'eau surchauffée) ;
- valide pour une gamme de température allant de l'ambient à 1000 ° C environ ;
- valide pour une gamme de pression allant quelques mbar à 100 bar environ ;
- non valide dans le cas d'un changement d'état.

Les principales relations issues de ce modèle, définissant les variables d'état sont décrites ci-après. La définition de l'énergie interne :

$$du = c_v dT \quad (3.1)$$

avec c_v la capacité calorifique mesurée à volume constant. Cette fonction est utilisée pour mesurer la quantité d'énergie au sein d'un système fermé. La définition de l'enthalpie³ dans le cadre du modèle Gaz parfait s'écrit

$$dh = du + d(pv) = c_p dT \quad (3.2)$$

avec c_p la capacité calorifique mesurée à pression constante. L'enthalpie est similaire à l'énergie interne augmentée des forces de pression.

Enfin, la définition de l'entropie est :

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - r \frac{dp}{p} \quad (3.3)$$

avec r la constante des gaz parfait spécifique, définie comme $r = R/M$ où M est la masse molaire du gaz. L'entropie permet d'évaluer la dégradation d'énergie

3. Ce résultat se démontre en utilisant la relation de Mayer, $c_p - c_v = r$, et la relation $pv = rT$. Soit $dh = c_v dT + r dT = (c_v + r) dT$.

au sein d'un système. Elle pourra être reliée aux frottements. Le modèle gaz parfait conduit également à une relation d'état entre les différentes variables thermodynamiques :

$$pV = nRT, \quad (3.4)$$

mais dont la forme suivante sera plus adaptée à l'étude de nos systèmes où la masse volumique est la plupart du temps connue :

$$\boxed{pv = rT \Leftrightarrow p = \rho rT}, \quad (3.5)$$

où v est le volume spécifique (m^3/kg), soit l'inverse de la masse volumique.

Il apparaît alors que le modèle Gaz parfait permet de définir l'ensemble des états d'énergie d'un système (u , h , et pv) à partir de la seule connaissance de sa température.

Enfin, la dernière relation issue de ce modèle est la définition d'une transformation isentropique. Cette transformation est le modèle idéal en terme de transfert d'énergie puisqu'elle garantit sa réversibilité : l'énergie n'est jamais dégradée. Bien qu'irréalisable en pratique, cette transformation idéale permet de déterminer les rendements des systèmes et de quantifier les irréversibilités de la transformation réelle.

3.2 Définition de la transformation isentropique

La transformation isentropique est donnée par la loi de Laplace, valide uniquement pour les fluides répondant au modèle Gaz Parfait :

$$\boxed{pv^\gamma = c^{te}}, \quad (3.6)$$

avec γ le coefficient de Laplace. En combinant cette relation avec la relation 3.5, il est possible de déterminer les changements de température, pression, masse volumique, intervenant lors d'une transformation isentropique.

Afin de compléter l'édifice théorique, Mayer a introduit plusieurs relations portant son nom. Elles permettent de lier entre elles les capacités calorifiques. Dans le cadre du modèle Gaz Parfait, elles s'écrivent simplement :

$$c_p - c_v = r, \quad (3.7)$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}. \quad (3.8)$$

Cela a pour conséquence une redéfinition des capacités calorifiques telles que :

$$c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}, \quad (3.9)$$

$$c_v = \frac{r}{\gamma - 1}. \quad (3.10)$$

3.3 Définition du travail d'un fluide compressible

L'ensemble des relations dérivées dans cette section permettra l'étude des systèmes thermodynamiques du cours, qu'ils concernent les machines volumétriques (systèmes fermés) ou les turbomachines (systèmes ouverts). Dans chacun des cas, il sera possible d'évaluer les travaux du fluide au sein de la machine. En système fermé, ils se calculent à volume constant :

$$\mathcal{T} = \int v dp, \quad (3.11)$$

et en système ouvert, ils se calculent à pression constante :

$$\mathcal{T} = \int p dv. \quad (3.12)$$

En combinant ces relations avec les bilans d'énergie présentés dans la section 1, l'ensemble des travaux, échanges de chaleur, variations d'enthalpie (ou d'énergie interne), et des frottements pourra être évalué pour n'importe quelle machine.

4 Écoulement compressible

4.1 Définition du nombre de Mach

Un écoulement sera considéré compressible des lors que le nombre de Mach, défini comme :

$$\boxed{\text{Ma} = \frac{\mathcal{V}}{c}}, \quad (4.1)$$

est supérieur à 0,3. Ici, c désigne la vitesse du son. Il est important de rappeler que celle-ci est thermodépendante. Dans le cadre du modèle gaz parfait elle peut se calculer comme :

$$c(T) = \sqrt{\gamma r T}. \quad (4.2)$$

La température du fluide devra donc être connue pour bien évaluer la compressibilité du fluide et son nombre de Mach.

Généralement, un écoulement sera considéré compressible dans le cas où $\text{Ma} > 0,3$. Cette valeur du nombre de Mach correspond en fait à une variation relative de la masse volumique du fluide inférieure à 5%, i.e. $\frac{\Delta \rho}{\rho} < 5\%$. Enfin, dans le cas d'un écoulement compressible, et sous réserve que le modèle Gaz Parfait soit valide, la masse volumique d'un gaz peut être approché par la relation :

$$\rho = \frac{p}{rT} \quad (4.3)$$

4.2 Définition des variables d'arrêt isentropique

Afin de simplifier les calculs de transfert d'énergie lors de l'écoulement de fluides compressibles, nous utiliserons les fonctions d'état et variables thermodynamiques *totales* : c'est-à-dire calculées comme *si* le fluide était à l'arrêt. Ces variables *totales* sont indicées "0", pour les différencier des variables dites *statiques*. Le terme *statique* ici désigne l'enthalpie qui serait mesurée par un capteur statique par rapport au fluide en mouvement, donc se déplaçant à la même vitesse. La variable *statique* peut aussi se voir comme la variable *totale* diminuée de l'énergie cinétique.

Pour un fluide non pesant⁴ (ce sera généralement toujours le cas dans ce cours), l'enthalpie totale est définie comme :

$$h_0 = h + \frac{\mathcal{V}^2}{2}. \quad (4.4)$$

A partir de la relation 4.4, il est possible d'exprimer l'évolution des autres variables thermodynamiques. Pour cela, nous utilisons la définition du nombre de Mach et le modèle Gaz Parfait. Cela conduit à l'expression suivante :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2, \quad (4.5)$$

où T_0 est la température totale et T la température statique. A noter que dans le cas où $\text{Ma} \ll 0,3$, alors ces deux températures sont confondues. C'est le cas en incompressible.

De même pour la pression, nous avons :

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (4.6)$$

Cette dernière équation se linéarise très bien dans le cas où $\text{Ma} \ll 1$: $p_0 \approx p + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2$, soit $p_0 \approx p + \rho \frac{\mathcal{V}^2}{2}$, ce qui correspond à la définition de pression *totale*, pression *statique* et pression *dynamique*, respectivement que nous connaissons bien en hydraulique. Ainsi, les variables d'arrêt isentropiques ne sont que la généralisation de ces concepts vus en hydraulique à tous les écoulement compressibles.

Afin d'illustrer ces concepts, la Figure 6 présente un exemple d'arrêt isentropique d'un fluide. Un fluide à la vitesse \mathcal{V}_1 arrive sur une sonde de Pitot où il s'arrête au point 01. Son énergie cinétique est alors entièrement convertie en enthalpie. Le fluide étant à l'arrêt, on parle alors d'enthalpie totale pour h_{01} . Nous pouvons remarquer également, que le ralentissement du fluide entraîne sa compression de p_1 vers p_{01} .

4. Dans le cas contraire, fluide pesant, l'enthalpie totale est définie en tenant compte de l'énergie potentielle, soit $h_0 = h + \frac{\mathcal{V}^2}{2} + gz$. Ce sera uniquement le cas avec de l'eau liquide.

Lors d'un écoulement compressible, toutes variations de vitesse (donc d'énergie cinétique du fluide) entraînent une modification de sa température, sa pression ou encore son enthalpie. Ce concept est valable que ce soit lors d'un arrêt ou d'une détente isentropique.

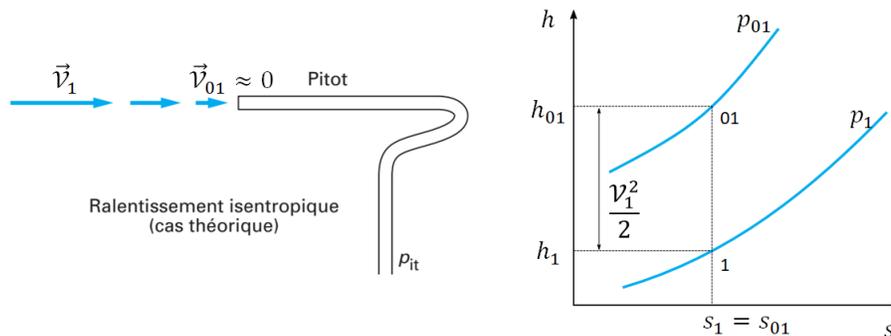


FIGURE 6 – Arrêt isentropique d'un fluide et son diagramme énergétique associé.

5 Diagramme énergétique des machines

Cette dernière partie reprend l'ensemble des éléments de cette note de cours afin de faire le lien entre l'énergétique, la cinématique et la géométrie des turbomachines. Cette section a pour but d'exposer les outils nécessaires pour le prédimensionnement des organes de turbomachine (géométrie d'aubage, conditions opératoire, nombre d'étages...).

5.1 Transfert d'énergie dans le stator

L'aubage le plus simple est le stator. Un exemple de géométrie est donnée sur la Figure 7. Dans cette organe, le fluide est simplement dévié, permettant une variation de son énergie cinétique et ainsi sa compression ou sa détente.

Nous traitons le cas d'une compression. Le fluide rentre au point 1 à la vitesse \vec{V}_1 et à la pression p_1 . L'enthalpie du fluide est fixée à h_1 et son enthalpie totale est h_{01is} (arrêt isentropique). En absence de travail et de transfert de chaleur, alors nous avons la relation suivante dans un stator :

$$h_{01} = h_{02is} = h_{02} = c^{te}. \quad (5.1)$$

Le stator conserve l'enthalpie totale du fluide. Néanmoins, la déviation du fluide (et le changement de section, $S_1 < S_2$) entraîne un ralentissement de sa

vitesse, d'où sa compression. En cas de frottements, la transformation n'est plus isentropique et aboutie au point 2 (ou 02). Les frottements ont pour effet de ralentir le fluide, i.e. $\mathcal{V}_{2is} > \mathcal{V}_2$. Dans un stator réel, le fluide sort à la même pression, mais avec une vitesse (et donc une énergie cinétique) moindre comparé au cas isentropique.

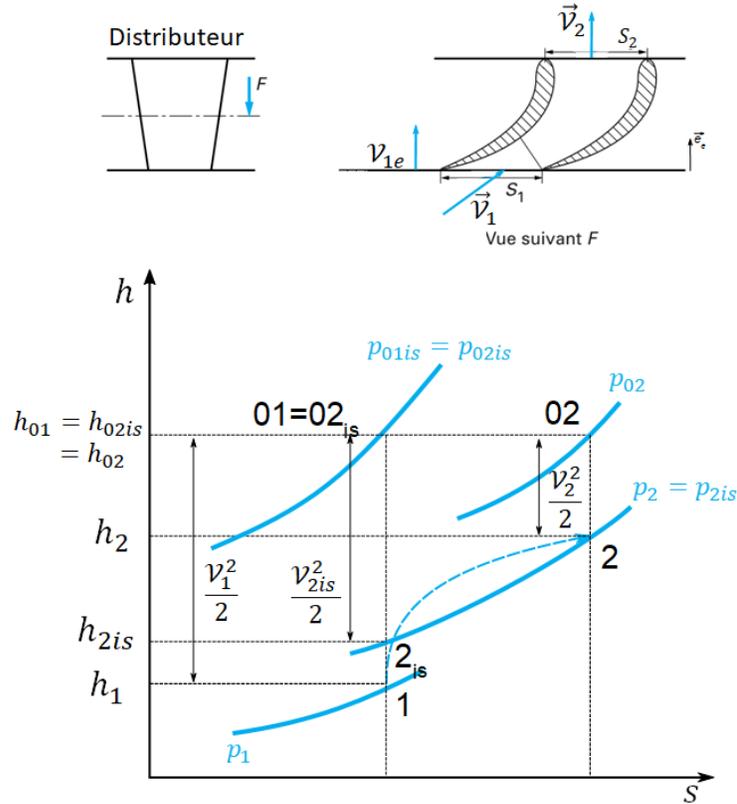


FIGURE 7 – Transformation d'énergie au sein d'un distributeur (stator). Figure adaptée de la référence [4]. La flèche bleue en pointillés indique la transfert d'énergie subit par le fluide.

5.2 Transfert d'énergie dans le rotor

Dans le cas du rotor (cf. Figure 8), il y a un échange de travail entre le fluide et la roue. Cela conduit à une variation de l'enthalpie totale du fluide. Dans le cadre d'une compression, nous avons le fluide qui rentre selon la vitesse \vec{v}_2 sur l'aubage, qui est ensuite dévié et entraîné par la roue pour ressortir à la vitesse \vec{v}_3 . Au passage, l'enthalpie totale du fluide a augmentée de :

$$h_{03} = h_{02} + \mathcal{T}_a, \quad (5.2)$$

où \mathcal{T}_a est le travail sur l'arbre issue du théorème d'Euler (equation 2.2). Si l'échange d'énergie était parfait, alors l'enthalpie du fluide serait

$$h_{03is} = h_{02} + \mathcal{T}_m, \quad (5.3)$$

en sortie de roue. Ici, \mathcal{T}_m correspond bien au travail isentropique que reçoit le fluide et est identique à celui qui est pris en compte lors du bilan de Bernouilli Généralisé appliqué au réseau. C'est donc le travail sur l'arbre diminué des frottements \mathcal{T}_{fa} . A noter enfin, qu'ici aussi, les frottements se traduisent par un ralentissement du fluide $\mathcal{V}_{3is} > \mathcal{V}_3$.

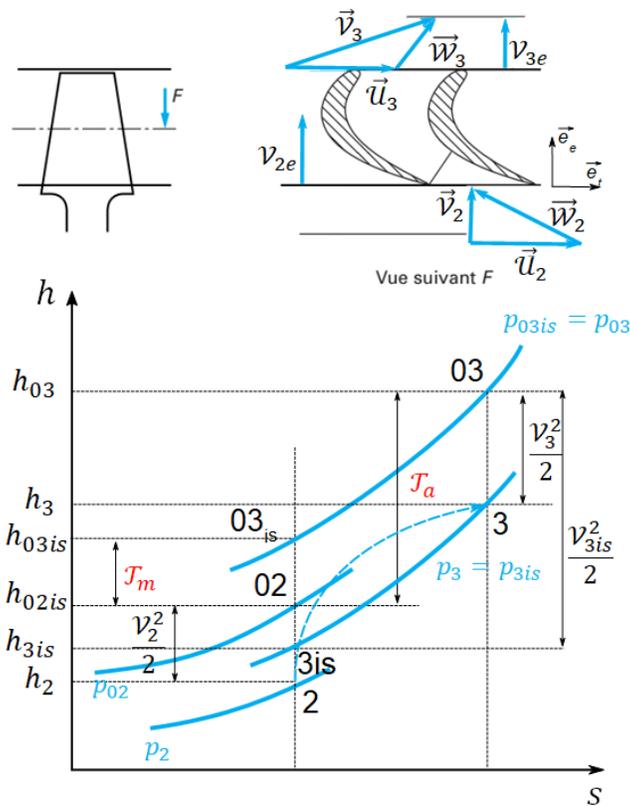


FIGURE 8 – Transformation d'énergie au sein d'un rotor d'un compresseur. Figure adaptée de la référence [4]. La flèche bleue en pointillés indique la transfert d'énergie subit par le fluide.

5.3 Rendement isentropique

Les notions de frottements, et donc de pertes d'énergie dans les machines, sont prises en compte au sein des rendements isentropiques de compression (ou

de détente dans le cas d'une turbine ou d'une tuyère). Ils sont définis comme :

$$\eta_c = \frac{\mathcal{T}_m}{\mathcal{T}_a} = \frac{h_{03is} - h_{02}}{h_{03} - h_{02}}, \quad (5.4)$$

$$\eta_d = \frac{\mathcal{T}_m}{\mathcal{T}_a} = \frac{h_{03} - h_{02}}{h_{03is} - h_{02}}. \quad (5.5)$$

Dans le cas d'une machine de détente, le travail isentropique cédé par le fluide \mathcal{T}_m est supérieur à celui récupéré sur l'arbre du fait des frottements. Ces relations de coefficients isentropique de compression et de détente seront utiles pour la modélisation de systèmes réels incluant des turbomachines.

Références

- [1] Michel PLUVIOSE and Christelle PÉRILHON. Turbomachines thermodynamique de la conversion d'énergie. *Techniques de l'ingénieur Machines aérodynamiques et compresseurs*, base documentaire : TIB176DUO.(ref. article : bm4282), 2003. fre.
- [2] Michel PLUVIOSE and Christelle PÉRILHON. Turbomachines description et principes de base. *Techniques de l'ingénieur Machines hydrauliques et thermiques : fondamentaux et concepts innovants*, base documentaire : TIB171DUO.(ref. article : bm4280), 2017. fre.
- [3] Olivier Cleynen. *Thermodynamique de l'ingénieur*. Framasoft, 2e edition, 2018.
- [4] Michel PLUVIOSE and Christelle PÉRILHON. Turbomachines bilan énergétique et applications. *Techniques de l'ingénieur Machines hydrauliques et thermiques : fondamentaux et concepts innovants*, base documentaire : TIB171DUO.(ref. article : bm4283), 2019. fre.